因式分解

**一、课程目标**

1.理解因式分解的意义，并感受因式分解与整式乘法是相反方向的变形.

2.掌握提公因式法和公式法这两种因式分解的基本方法，了解因式分解的一般步骤.

3.能熟练地用提公因式法或公式法进行多项式的因式分解.

**二、课程内容**

**知识点一 因式分解的定义**  
把一个**多项式**化成几个**整式的积**的形式，这种变形叫做这个多项式的因式分解，也叫做把这个多项式分解因式.  
**注：**  
(1)研究的对象是多项式，结果是整式的积；  
(2)整式乘法与因式分解的关系：多项式整式乘积  
**易错警示：**分解不彻底

**题型一 因式分解的识别**

**例1-1** 下列变形中是因式分解的是（ ）

A.

B.

C.

D.

【思路分析】把一个多项式在一个范围（如有理数范围内因式分解，即所有项均为有理数）

化为几个最简整式的积的形式，这种变形叫做因式分解*.*

【解】 A中不是整式.B和C不是积的形式.D是因式分解.

故选：D.

【总结提示】识别某个等式的变形是因式分解的方法，关键扣住两点：一是等式的左边是多项式；二是等式的右边是整式的积.

**配套练习1-1**

**（中考真题）**下列等式从左到右的变形，属于因式分解的是（  ）.

A： 

B： 

C：  

D： 

答案：D

**题型二 因式分解正确性的判断**

**例1-2** 下列因式分解正确的是（  ）.

A： 

B： 

C： 

D： 

【思路分析】根据因式分解与整式乘法的关系逆向判断，利用整式的乘法法则将各选项等式的右边展开，与等式的左边相比较，左右两边相同的即为正确答案.

【解】A项，提取公因式得，. 故A项错误.

B项，利用完全平方公式得，  .故B项正确.

C项，  不能因式分解.故C项错误.

D项，利用平方差公式进行因式分解得，. 故D项错误.

故本题正确答案为B.

【总结提示】因式分解与整式乘法是互逆变形，可以通过逆向变形检验因式分解的正确性.

**配套练习1-2**

**（中考真题）**下列因式分解错误的是（　　）

A.*x*2-*y*2=（*x*+*y*）（*x*-*y*）

B.*x*2+6*x*+9=（*x*+3）2

C.*x*2+*xy*=*x*（*x*+*y*）

D.*x*2+*y*2=（*x*+*y*）2

答案：D

**题型三 利用因式分解求字母的值**

**例1-3** 仔细阅读下面的例题，并解答问题.

|  |
| --- |
| 例题：已知二次三项式*x*2-4*x*+*m*有一个因式是(*x*+3)，求另一个因式以及*m*的值.  【解】设另一个因式为(*x*+*n*)，得*x*2-4*x*+*m*=(*x*+3)(*x*+*n*)，则*x*2-4*x*+*m*=*x*2+(*n*+3)*x*+3*n*.  ∴*n*+3=-4，*m*=3*n*.  解得*n*=-7，*m*=-21.  ∴另一个因式为(*x*-7)，*m*的值为-21. |

问题：

（1）若二次三项式*x*2-5*x*+6可分解为(*x*-2)(*x*+*a*)，则*a*=     ；

（2）若二次三项式2*x*2+*bx*-5可分解为(2*x*-1)(*x*+5)，则*b*=     ；

（3）仿照上述方法解答问题：已知二次三项式2*x*2+5*x*-*k*有一个因式是(2*x*-3)，求另一个因式以及*k*的值.

【思路分析】对于（1），将(*x*-2)(*x*+*a*)展开，根据所给出的二次三项式即可求出*a*的值；

对于（2），将(2*x*-1)(*x*+5)展开，可得出一次项的系数，继而即可求出*b*的值；

对于（3），不妨设另一个因式为（*x*+*n*），得2*x*2+5*x*-*k*=(2*x*-3)(*x*+*n*)=2*x*2+(2*n*-3)*x*-3*n*，可知2*n*-3=5，*k*=3*n*，继而求出*n*和*k*的值及另一个因式.

【解】（1）∵(*x*-2)(*x*+*a*)=*x*2+(*a*-2)*x*-2*a*=*x*2-5*x*+6，

∴*a*-2=-5，

解得：*a*=-3；

（2）∵(2*x*-1)(*x*+5)=2*x*2+9*x*-5=2*x*2+*bx*-5，

∴*b*=9；

（3）设另一个因式为（*x*+*n*），得

2*x*2+5*x*-*k*=(2*x*-3)(*x*+*n*)=2*x*2+(2*n*-3)*x*-3*n*，

则2*n*-3=5，*k*=3*n*，

解得：*n*=4，*k*=12，

故另一个因式为（*x*+4），*k*的值为12.

【总结提示】此题考查因式分解的实际运用，正确读懂例题，理解如何利用待定系数法求解是解本题的关键．

**配套练习1-3**

若 能分解成两个因式的乘积，且有一个因式为，设另一个因式为 ，其中*m*，*n*为常数，请你求*m*，*n*的值.

【解】根据题意得：

42*x*2-31*x*+2=(6*x*-4)(*mx*-*n*)=6*mx*2-(4*m*+6*n*)*x*+4*n*，   
可得 ，   
计算得出：  ， 

**知识点二 提公因式法因式分解**

1. **公因式的定义：**多项式中各项都含有的公共的因式，叫做多项式各项的公因式.

**2.提公因式法：**如果多项式的各项有公因式，可以把这个公因式提取出来，将多项式写成公因式与另一个因式的乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.  
用字母表示为：*ma*+*mb*+*mc*=***m*(*a*+*b*+*c*)**

**提公因式法的一般步骤：**

第一步找出公因式；

第二步确定另一个因式；

第三步写成积的形式.

**题型一 利用公因式的定义确定公因式**

**例2-1** 指出下列多项式的公因式：

（1） ；

（2） ；

（3） ；

（4）.

【思路分析】如何确定公因式：比如在多项式*ma*+*mb*+*mc*中，各项都含有一个公共的因式*m*，因式*m*叫做这个多项式各项的公因式．

【解】（1）中多项式各项系数的最大公约数是3，所以公因式的系数为3，有相同字母*y*，并且*y*的最低次数是l，所以公因式为3*y*.

（2）多项式各项的系数是分数，分母的最小公倍数是27，分子的最大公约数是4，所以公因式的系数是 ，两项都有*x*，*y*，且*x*的最低次数是*l*，*y*的最低次数是2，所以公因式为：  .

（3）观察发现三项都含有（*x*-*y*）这个因式，且（*x*-*y*）的最低次数为2，所以公因式为.

（4）此多项式的第一项含“-”，应将“-”提取变为，多项式 各项系数的最大公约数是9，且*a*的最低次数为2，*b*的最低次数是1，所以这个多项式的公因式为.

【总结提示】**找准公因式要“五看”**，即：

一看系数：若各项系数都是整数，应提取各项系数的最大公约数；

二看字母：公因式的字母是各项相同的字母；

 三看字母的指数：各相同字母的指数取次数最低的；

四看整体：如果多项式中含有相同的多项式，应将其看作整体，不要拆开；

五看首项符号：若多项式中项是“一”号，一般情况下公因式符号为负.

**配套练习2-1**

把多项式6 *a* 3 *b* 2-3 *a* 2 *b* 3-9 *a* 2 *b* 2分解因式时，应提取公因式 ( )

A. 3 *a* 2 *b* B. 3 *ab* 2 C. 3 *a* 2 *b* 3 D. 3 *a* 2 *b* 2

答案：D

**题型二 利用提公因式法分解因式**

**例2-2** 用提公因式法将下列各式分解因式

(1)4*x*2*y*3＋8*x*2*y*2*z*－12*xy*2*z*；

(2)－*a*2*b*3*c*＋2*ab*2*c*3－*ab*2*c*；

(3)5*x*(*x*－2*y*)3－20*y*(2*y*－*x*)3.

【思路分析】运用提公因式法分解因式的第一步是确定公因式，公因式可以是单项式，也可以是多项式；第二步是提取公因式，其中(2)题应先提出“-”号，(3)题可把(2*y*-*x*)3化为-(*x*-2*y*)3

【解】(1)原式＝4*xy*2(*xy*＋2*xz*－3*z*)．

(2)原式＝－*ab*2*c*(*ab*－2*c*2＋1)．

(3)原式＝5*x*(*x*－2*y*)3＋20*y*(*x*－2*y*)3＝5(*x*－2*y*)3(*x*＋4*y*)．

【总结提示】准确地找出公因式是分解因式的关键，(3)题将(*x*－2*y*)3和(2*y*－*x*)3化成同底数幂时，要注意符号的变化.

**配套练习2-2**

用提取公因式法分解因式：

（1）8*ab*2-16*a*3*b*3；

（2）-15*xy*-5*x*2；

（3）*a*3*b*3+*a*2*b*2-*ab*；

（4）-3*a*3*m*-6*a*2*m*+12*am*．

答案：（1）8*ab*2（1-2*a*2*b*）

（2）-5*x*（3*y*+*x*）

（3）*ab*（*a*2*b*2+*ab*-1）

（4）-3*am*（*a*2+2*a*-4）

【总结提示】**：**(1)找底数互为相反数的幂的公因式时符号出错.

(2)提取公因式后，漏掉另一个因式中商是1或-1的项.

(3)提取公因式后，多项式中各项还含有公因式.

**知识点三 平方差公式法因式分解**

**平方差公式法**：两个数的**平方差**，等于这两个数的**和**与这两个数的**差**的积.  
即：*a*2-*b*2=**(*a*+*b*)(*a*-*b*)**.  
**注：**（1）*a*2- *b*2(*a*+*b*)(*a*-*b*).  
(2)用平方差公式分解因式时，若多项式有公因式，要先提取公因式，再用平方差公式分解因式.  
（3）平方差公式中的字母*a*，*b* 可以是一个单项式或一个多项式.

**题型一 利用平方差公式分解因式**

**例3-1** 分解因式

(1) 9*a*2-4*b*2；

(2) *x*2*y*-4*y*；

(3) (*a*+1)2-1

(4) *x*4-1；

(5) 

【思路分析】对于(1)可先化成平方差形式，再直接利用平方差公式分解因式；

对于(2)可先提取公因式，再利用平方差公式分解因式；

对于(3)将(*a*+1)视为一个整体运用平方差公式分解因式；

对于(5)分别将(*x*+*y*+*z*)与(*x*-*y*+*z*)视为整体，运用平方差公式分解因式.

【解】(1)原式=(3*a*)2-(2*b*)2=(3*a*+2*b*)(3*a*-2*b*).  
(2)原式=*y*(*x*2-4)=*y*(*x*+2)(*x*-2).  
(3)原式=(*a*+1+1)(*a*+1-1)=*a*(*a*+2).

(4)原式=(*x*2+1)(*x*2-1)=(*x*2+1)(*x*+1)(*x*-1).

(5)原式=[(*x*+*y*+*z*)+(*x*-*y*+*z*)][(*x*+*y*+*z*)-(*x*-*y*+*z*)]

=(*x*+*y*+*z*+*x*-*y*+*z*)(*x*+*y*+*z*-*x*+*y*-*z*)

=2*y*(2*x*+2*z*)=4*y*(*x*+*z*).

【总结提示】(1)**运用平方差公式分解因式**的关键是确定公式中的*a*和*b*，再运用公式进行因式分解；对于有公因式的多项式，需要先提取公因式再用平方差公式分解因式，同时分解因式要进行到每一个因式都不能再分解为止.  
(2)注意：运用平方差公式分解因式，最后的结果除了要求不能再分解因式外，还要注意使每个因式最简.  
(3)运用平方差公式分解因式不彻底.  
(4)合理使用平方差公式形式的多项式.

**配套练习3-1**

因式分解：  
（1）4（*a*-*b*）2-16（*a*+*b*）2  
（2）81*a*4-*b*4．

【解】（1）原式=[2（*a*-*b*）+4（*a*+*b*）][2（*a*-*b*）-4（*a*+*b*）]=-4（3*a*+*b*）（*a*+3*b*）；  
（2）原式=（9*a*2+*b*2）（9*a*2-*b*2）=（9*a*2+*b*2）（3*a*+*b*）（3*a*-*b*）．

**题型二 利用平方差公式因式分解求值**

**例3-2** 若*x*-*y*=2，*x*2-*y*2=6，则*x*+*y*= ．

【思路分析】已知条件中的*x*2-*y*2，是已知中的*x*-*y*与所求的结果*x*+*y*的积．根据平方差公式可以求出*x*+*y*的值．

【解】∵（*x*+*y*）（*x*-*y*）=*x*2-*y*2，  
∴*x*+*y*=（*x*2-*y*2）÷（*x*-*y*）=6÷2=3．  
故答案为：3．

【总结提示】本题考查了平方差公式，根据公式中的两个因式与积的关系进行求解．

**配套练习3-2**

设*n*为整数，求证（2*n*＋1）2－25能被4整除．

【证明】∵（2*n*+1）2-25，  
=（2n+1+5）(2n+1-5)，  
=(2n+6)(2n-4)

=4(n+3)(n-2)．  
∴（2*n*+1）2-25能被4整除．

**知识点四 完全平方公式法因式分解**

**1.完全平方式：**形如*a*2±2*ab*+*b*2的式子叫做完全平方式.  
即：两个数的平方和加上(或减去)这两个数的积的2倍的式子是完全平方式.

**注：**完全平方式是一个二次三项式的多项式.  
**2.完全平方公式法：**两个数的平方和加上(或减去)这两个数的积的2倍，等于这两个数的和  
(或差)的平方.  
即：*a*2±2*ab*+*b*2=(*a*±*b*)2.  
**注：**用完全平方公式分解因式时，若多项式各项有公因式，要先提取公因式，再用完全平方公式分解因式.

**题型一 利用完全平方式的结构求字母的值**

**例4-1（易错题）** 若*x*2+（*m*-3）*x*+4是完全平方式，则*m*的值等于\_\_\_\_\_\_．

【思路分析】错解：因为*x*2+(*m*-3)*x*+4=*x*2+(*m*-3)*x*+22，

*x*2+(*m*-3)*x*+4是完全平方式，所以(*m*-3)*x*=2*x*·2，

因此*m*-3=4，所以*m*=7.

错解分析：错在只注意到中间项的符号是正，而忽视中间项的符号是负的情况产生的漏解.

【解】∵多项式*x*2+（*m*-3）*x*+4是完全平方式，   
∴（*m*-3）=±4，   
解得：*m*=7或*m*=-1，   
则*m*的值为-1或7．   
故答案为：*m*=7或-1．

【总结提示】在求与完全平方式有关的字母取值时，要注意中间项的符号有“+”“-”两种情形，否则容易产生漏解.

**配套练习4-1**

已知*a*2+*ma*+是完全平方式，则*m*的值等于（ ）

A.- B.3 C.  D.±

答案：D

**题型二 利用完全平方公式分解因式**

**例4-2** 分解因式：

(1)

(2)

(3)

【思路分析】对于(1)可直接运用完全平方公式分解因式；

对于(2)先提取公因式-2*xy*，再运用完全平方公式分解因式；

对于(3)可先将(*b*-*a*)化为-(*a*-*b*)，再运用完全平方公式分解因式.

【解】(1)原式=

(2)原式=

(3)原式=

【总结提示】此题主要考查了公式法分解因式，正确应用公式是解题关键．

**配套练习4-2**

分解因式：  
(1)  ；

(2)  .

【解】(1)原式 ；

(2)    
   
.

**题型三 利用提公因式法和公式法分解因式**

**例4-3（中考真题）** 分解因式：

(1)= ；

(2)= .

【思路分析】先提公因式，再运用公式法分解因式.

【解】(1)原式=

(2)原式=

【总结提示】因式分解的一般步骤：首先看有无公因式可提，然后再考虑是否可用公式法分解，若是两项可考虑平方差公式，若是项可考虑完全平方公式；每个因式都要分解到不能再分解为止.即因式分解三步曲：一提(公因式)，二套(公式)，三看(是否分解彻底).

**配套练习4-3**

(1)(*x*－1)＋*b*2(1－*x*)；

(2)－3*x*7＋24*x*5－48*x*3.

【解】(1)原式＝(*x*－1)－*b*2(*x*－1)

＝(*x*－1)(1－*b*2)

＝(*x*－1)(1＋*b*)(1－*b*)．

(2)原式＝－3*x*3(*x*4－8*x*2＋16)

＝－3*x*3(*x*2－4)2

＝－3*x*3(*x*＋2)2(*x*－2)2.